

ZAHLEN IN DER STATISTIK

NEUES VOM MINENFELD

Workshop im Rahmen der Fortbildung
Zahlen im Mathematikunterricht aus unterschiedlichen Perspektiven
Regensburg, 08.10.2015



Worum geht es?

- **Darstellungen** von Prozentangaben und Wahrscheinlichkeiten im Lehrplan und im Alltag
- **Schwierigkeiten** beim Umrechnen verschiedener Darstellungsarten
- Erstellen von **Aufgaben** für den Unterricht
- Wo findet man **Unterrichtsmaterial**?

„Prozent“ und „Wahrscheinlichkeit“ im Lehrplan

Jgst.	Mittelschule	Realschule	Gymnasium
5	-	-	-
6	-	rel. Häufigkeit, Prozent	rel. Häufigkeit, Prozent
7	Prozent	Laplace- Wsk. , rel. Häufigkeit	Prozent
8	Prozent	Laplace-Wsk.	Laplace- Wsk.
9	rel. Häufigkeit, Prozent	Wsk., Pfadregeln	Wsk., Pfadregeln
10	M-Zug: Laplace- Wsk. , Pfadregeln	-	Pfadregeln, bedingte Wsk.
11			Wsk.-begriff
12			Wsk.-verteilung

Bildungsziele zur Leitidee L5: „Daten und Zufall“

- Vermittlung stochastischen Denkens („Zufall“) im Kontrast zu funktionalem und zu deterministischem Denken („Sicherheit“)
- Förderung des Entscheidens und Urteilens unter Unsicherheit
- Verhinderung von Fehlvorstellungen durch frühe Instruktion und geeignete Repräsentationen
- Aufbau korrekter und tragfähiger „Sekundärintuitionen“ als dynamischer Prozess (spiralförmiges Curriculum)
- Zurechtfinden in der Informationsgesellschaft
- Sensibilisierung gegenüber einem zweifelhaften Gebrauch und bewusster Manipulation durch Statistik

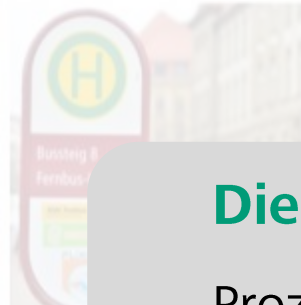
Schulform-
übergreifend!

Basierend auf: KMK (2003). *Beschlüsse der Kultusministerkonferenz: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. München: Wolters Kluwer.

Darstellungen statistischer Information in Zeitungen

Jeder Achte fuhr schon Fernbus statt Bahn

Parallel zu vielen ICE-Strecken fahren immer mehr Fernbusse. Es steigt der Anteil derjenigen, die statt in den Zug auch mal in den Bus steigen.



Quelle:
Zeitung

BERLIN. Die Fernbusse machen der Deutschen Bahn nach einer Umfrage zunehmend mögliche Kunden abspenstig. Knapp jeder achte Deutsche (12 Prozent) ist seit Januar 2013

Jeder Fünfte sucht einen neuen Job

Der Trend bei der Bewerbung geht dabei derzeit immer mehr in Richtung E-Mail. Als Informationsgeber bei der Jobsuche werden Tageszeitungen bevorzugt.



FRANKFURT/MAIN. Neues Jahr, neues Glück: Das denken nicht wenige auch im Hinblick auf die Karriere. Fast jeder Fünfte (18 Prozent) sucht derzeit dringend einen neuen Job. Das zeigt eine bevölkerungsrepräsentative

Jurastudenten für drakonische Strafen

Jeder dritte Jurastudent am Anfang seiner Ausbildung will die Todesstrafe zurück. Der Wunsch nach hohen Strafen wächst.



VON CATHERINE SIMON, DPA

ERLANGEN Es ist paradox: Die Zahl der Morde und Totschläge sinkt in Deutschland seit Jahren. Die Leute fühlen sich so sicher wie fast nie zuvor. Und dennoch wächst bei jungen Jurastudenten der Wunsch nach immer härteren Strafen. Ein Drittel von ihnen antwortet laut einer Studie sogar die Todesstrafe. Etwa gleich viele finden, dass selbst eine lebenslange Haft bei manchen Straftaten noch zu mild ist. Und die Hälfte der Befragten wurde einen

Die drei Klassiker in Zeitungen:

Prozent, absolute Häufigkeiten und „jeder Wievielte“ – und in der Schule?

Zeitung (26.11.2014)



Quelle: BILD
(28.11.2014)



Quelle: Die Welt
(09.03.2014)

Verschiedene Darstellungen statistischer Informationen

Numerische Darstellungen

Beispiel

Relevanz

➤➤ Prozente	25 %	Schule & Medien
➤➤ Dezimalbrüche	0,25	Schule
➤➤ Gewöhnliche Brüche	$\frac{1}{4}$	Schule
➤➤ Absolute Häufigkeiten	1 von 4	Medien
➤➤ „Jeder wievielte“	jeder vierte	Medien
➤➤ Chancenverhältnisse	1 : 3 („1 zu 3“)	Medien (selten)

Erstaunlicherweise ist die Umrechnung dieser Darstellungen nicht selbstverständlich!

Schwierigkeiten beim Umrechnen verschiedener Darstellungsarten



Aufgabe 1:

- (a) Rechnen Sie die beiden im ausgehändigten Artikel markierten Informationen in jede der fünf anderen numerischen Darstellungsarten um.
- (b) Sammeln Sie mögliche Schülerfehler, die Sie sich bei den Umrechnungen vorstellen können.

Aufgabe 2:

- (a) Stellen Sie die Aussage „99,7 % der Asylanträge aus dem Kosovo und Mazedonien werden abgelehnt.“ in der Darstellungsart „jeder Wievielte“ dar.
- (b) Welche der alternativen fünf Darstellungsarten halten Sie für am besten geeignet, um „99,7 %“ wiederzugeben? Rechnen Sie dazu jeweils um.

Zu Aufgabe 1

- (a) Rechnen Sie die beiden im Artikel markierten Informationen in jede der fünf anderen numerischen Darstellungsarten um.

Numerische Darstellung	Beispiel	„Zwei von fünf“	„Jeder Fünfte“
Prozente	25 %	40 %	20 %
Dezimalbrüche	0,25	0,4	0,2
Gewöhnliche Brüche	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
Absolute Häufigkeiten	1 von 4	2 von 5	1 von 5
„Jeder wievielte“	jeder Vierte	—————	jeder Fünfte
Chancenverhältnisse	1 zu 3	2 zu 3	1 zu 4

Zu Aufgabe 1

(b) Sammeln Sie möglichst viele Schülerfehler, die Sie sich bei den Umrechnungen vorstellen können.

Überblick über mögliche Fehler:

- Umrechnung von „x %“ in „jeder x-te“:
Bsp.: 5 % \triangleq „jeder 5-te“ (nur für „10 %“ gültig)
- Umrechnung von Chancenverhältnissen „1 zu x“ in gewöhnliche Brüche „1/x“ (und umgekehrt):
Bsp.: $\frac{1}{4}$ (=1:4) \triangleq Chancenverhältnis „1 zu 4“ (statt „1 zu 3“)
- Umrechnung von „x von y“ in „jeder z-te“:
Bsp.: „3 von 10“ \triangleq „jeder $3\frac{1}{3}$ -te“ (nur für Stammbrüche möglich)
- Umrechnung von Prozentangaben größer als 50 % in „jeder x-te“:
Bsp.: 80 % \triangleq „jeder ?-te“ (nur für ≤ 50 % sinnvoll)

Zu Aufgabe 2

- (a) Stellen Sie die Aussage „99,7 % der Asylanträge aus dem Kosovo und Mazedonien werden abgelehnt.“ in der Darstellungsart „jeder Wievielte“ dar.

Lösung:

Da 99,7 % der Asylanträge abgelehnt werden, werden 0,3 % der Anträge bewilligt.

Nebenrechnung:

$$1000 : 3 = 333$$

Es wird also etwa „jeder 333-ste“ Asylantrag aus dem Kosovo und Mazedonien bewilligt.

Zu Aufgabe 2

(b) Welche der alternativen fünf Darstellungsarten halten Sie für am besten geeignet, um „99,7 %“ wiederzugeben? Rechnen Sie dazu jeweils um.

Dezimalbruch: 0,997

Gewöhnlicher Bruch: $997/1000$

Absolute Häufigkeiten: 997 von 1000

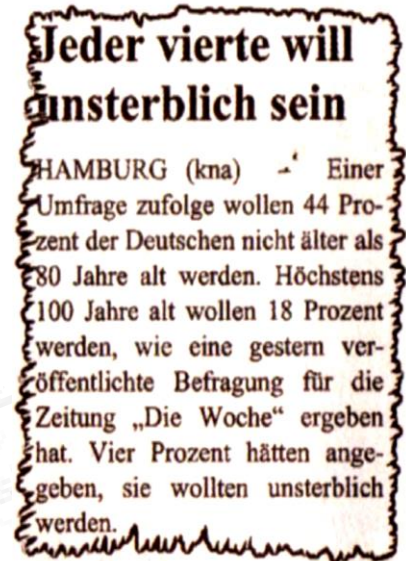
„jeder Wievielte“: etwa „jeder 333-ste“

Chancenverhältnis: 997 zu 3 (bzw. „332 zu 1“ bzw. „1 zu 332“)

Erstellen von Aufgaben für den Unterricht



- Finden Sie die Fehler in den Zeitungsausschnitten.
- Erstellen Sie zu jedem Zeitungsausschnitt mögliche Aufgabenstellungen für Ihre Schülerinnen und Schüler.



Beispiel A1

Anstieg der Rauschgiftopfer gegenüber dem Vorjahr alarmierend

Anzahl der Drogentoten hat sich 1990 fast verdoppelt

WIESBADEN (dpa) Die Zahl der Rauschgifttoten in der Bundesrepublik ist 1990 alarmierend gestiegen und gegenüber dem vergangenen Jahr um fast 50 Prozent angewachsen.

Wie das Bundeskriminalamt (BKA) in Wiesbaden mitteilte, wurden

Quelle: Goslarsche Zeitung (28.12.1990)

Mögliche Aufgabenstellungen

- Kannst du selbst feststellen, welche der beiden Angaben stimmt: „Verdoppelt“ oder „um 50 % gestiegen“?
- Ist der Ausdruck „eklatanter Anstieg“ in diesem Fall gerechtfertigt?

Beispiel A2

Fast jeder zweite Sachse lebt allein

Sachsen „versingelt“. Hier leben immer mehr Menschen allein. Fast jeder zweite der 4,2 Millionen Einwohner wohnt – statistisch betrachtet – allein in seinen vier Wänden.

8. Haushalte 2007 bis 2009 nach Haushaltsgröße¹⁾

Haushalte mit ... Person(en)	2009	
	1 000	%
1	944,9	42,6
2	808,2	36,5
3	283,4	12,8
4	143,9	6,5
5 und mehr	35,2	1,6

10. Bevölkerung in Haushalten 2009 nach Altersgruppen, Geschlecht und Familienstand sowie nach Haushaltsgröße¹⁾ (in 1 000)

Merkmal	Insgesamt	In Haushalten mit ... Person(en)				
		1	2	3	4	5 und mehr
Insgesamt	4 174,0	944,9	1 616,5	850,3	575,5	186,8

Mögliche Aufgabenstellungen

- Warum ist die Überschrift falsch?
- Wie lautet die korrekte Antwort auf die Frage, wie viel Prozent der Sachsen alleine leben?

Oder:

Warum berichten mehr Leute von vollen als von leeren Zügen?

Quelle: Sächsische Zeitung (21.10.2010)

Beispiel B1

Quelle: Leipziger Volkszeitung (9.10.2013)

Erschreckende Wissenslücken

Erwachsene in Deutschland können im internationalen Vergleich nur mittelmäßig lesen und Texte verstehen. Gleiches gilt für Grundrechenarten wie Prozentrechnen. Dies zeigt der erste PISA-Test zu den Alltagskompetenzen von Erwachsenen in 24 wichtigen Industrienationen der Welt.

Die „PISA für Große“-Studie verschärft die Aussage früherer Studien: **Jeder Sechste** liest nur so gut wie ein zehnjähriges Kind. Das ist beim Kopfrechnen nur unwesentlich besser, schließlich hapert es hier bei **jedem Fünften** mit dem Einmaleins.

Der erfreulichste Teil der Studie:

Mögliche Aufgabenstellungen

- Welche Aussage ist falsch?
- Übersetze die Angaben „jeder Sechste“ und „jeder Fünfte“ in eine Prozentangabe.

Ehescheidungen

Jede dritte Ehe in Deutschland wird geschieden, in Großstädten sogar **jede vierte**

Quelle: Wochenpost (7.8.1995)

Quelle: Norderneyer Badezeitung (zitiert nach Der Spiegel 41/1991, S. 352)

Beispiel B2

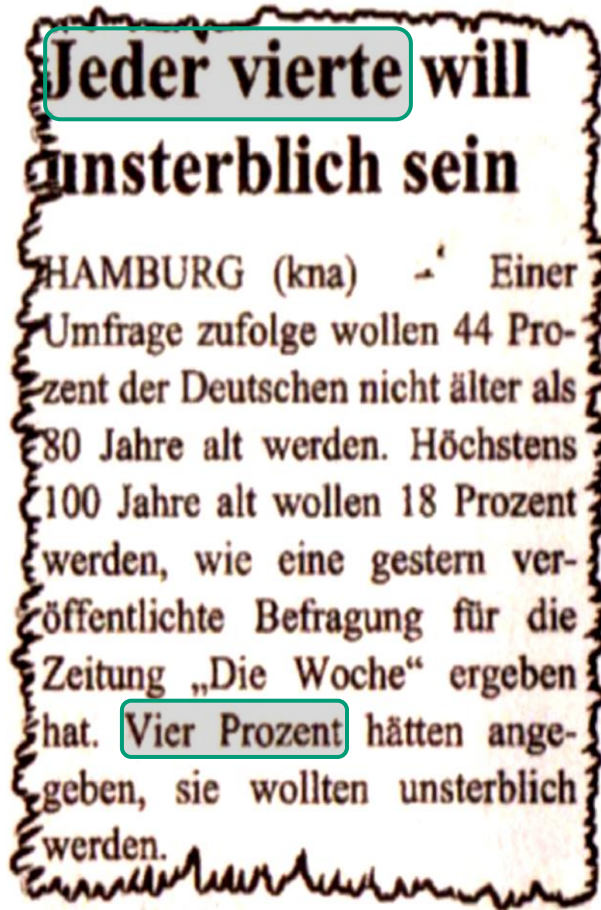
Aus der *Norderneyer Badezeitung*:
„Fuhr vor einigen Jahren noch **jeder zehnte** Autofahrer zu schnell, so ist es mittlerweile heute ‚nur noch‘ **jeder fünfte**. Doch auch **fünf Prozent** sind zu viele, und so wird weiterhin kontrolliert, und die Schnelfahrer haben zu zahlen.“

Mögliche Aufgabenstellungen

- In dieser Zeitungsmeldung finden sich zwei Fehler! Finde diese Fehler.
- Korrigiere eine der drei Zahlenangaben, so dass beide Fehler „gleichzeitig verschwinden“.

Beispiel 3

Quelle: Mainzer Allgemeine Zeitung (7.8.1997)



Mögliche Aufgabenstellungen

- Finde den Fehler in dieser Zeitungsmeldung!
- Übersetze den Ausdruck „jeder Vierte“ in eine Prozentangabe und den Ausdruck „vier Prozent“ in eine Angabe der Form „jeder Wievielte“.

Beispiel 4

ZEIT: Sie warnen in Ihrem Essay auch vor einer Wiederholung der Fehler, die man in Skandinavien gemacht hat. Wie würden Sie die Entwicklung dort beschreiben?

Juul: Die letzte große qualitative Untersuchung in Dänemark hat gezeigt, dass es 24 Prozent der befragten Jungen zwischen drei und sechs Jahren nicht gut geht in der Kita. Bei den Mädchen waren es zehn Prozent. Mehr als ein Drittel aller Kinder fühlt sich also nicht wohl. Das sollte man sehr ernst nehmen. Es lässt sich auch fest-

Mögliche Aufgabenstellungen

- Wo liegt der Fehler?
- Nimm an, dass gleich viele Mädchen wie Jungen befragt wurden. Wie viel Prozent aller Kinder fühlen sich demnach nicht wohl?

Überblick über mögliche Fehler und Schwierigkeiten

- Übertragung der Ordnungsrelation in \mathbb{N} auf die Darstellungsart „jeder x-te“:
Bsp.: „jeder Sechste“ $>$ „jeder Fünfte“ (da in \mathbb{N} gilt: $6 > 5$)
- Umrechnung von Prozentangaben größer als 50 % in „jeder x-te“:
Bsp.: 80 % \triangleq „jeder ?-te“ (nur für ≤ 50 % sinnvoll)
- Übergeneralisierung von Halbierung und Verdopplung:
Bsp.: Steigerung von 50 % \triangleq Verdopplung (statt: Steigerung von 100 %)
- Umrechnung von „x %“ in „jeder x-te“:
Bsp.: 5 % \triangleq „jeder Fünfte“ (nur für 10 % \triangleq „jeder Zehnte“ gültig)
- Umrechnung von Chancenverhältnissen „1 : x“ in gewöhnliche Brüche „1/x“ (und umgekehrt):
Bsp.: „ $\frac{1}{4}$ (=1 zu 4)“ \triangleq Chancenverhältnis „1 zu 4“ (statt „1 zu 3“)
- Umrechnung von „x von y“ in „jeder z-te“:
Bsp.: „3 von 10“ \triangleq „jeder $3\frac{1}{3}$ -te“ (nur für Stammbrüche möglich)

Darstellung von Risikoreduktionen bzw. -erhöhungen

Eine Studie mit einem neuen Medikament ergibt, dass 50 von 1000 Menschen mit einer schweren Krankheit vollständig geheilt werden können.

Zwei Jahre davor wurde eine ähnliche Studie mit einem älteren Medikament durchgeführt, in der 40 von 1000 Patienten geheilt werden konnten.

Welche Aussage ist richtig?

- A) Das neue Medikament erhöht die Heilungschancen um 1 %.
- B) Das neue Medikament erhöht die Heilungschancen um 25 %.

→ Was bedeutet „Heilungschancen“?

Aufgabe an Schüler:

Diskutiere die beiden Aussagen! Gibt es eine richtige Aussage?

Lösung

Beides ist begründbar! („Prozentpunkte“ vs. „Prozent“; „absolut“ vs. „relativ“)

A) 40 von 1000 sind 4 % und 50 von 1000 sind 5 %.

Es fand also eine **absolute Erhöhung von einem Prozentpunkt** statt.

B) 10 mehr Geheilte bedeutet auf die 40 Geheilten bezogen aber eine Steigerung um 25 %.

Es fand also eine **relative Erhöhung von 25 %** statt.

Die unterschiedliche Kommunikation von Daten kann also – auch wenn sie beide Male korrekt ist und auch richtig erklärt wird – zu völlig unterschiedlichen subjektiven Bewertungen einer Situation führen.

Und zum Abschluss...



Mögliche Frage: Wo sollte man sich nun aufhalten?

**„28,4 % aller Todesfälle ereignen sich zuhause.
Besser, Sie sind nicht da.“**

Aber: Wenn sich 28,4 % aller Todesfälle zuhause ereignen, ereignen sich 71,6 % aller Todesfälle außer Haus!

Sollte man also besser zuhause bleiben?

Die Cinemaxx-Werbung ist deshalb wirkungsvoll, da die meisten von uns den ersten Prozentsatz auf ca. 10 % schätzen würden.

Verglichen dazu sind 28,4 % „erschreckend hoch“!

Unsere Interpretationen von berichteten Prozentsätzen (z. B. Risiken) richten sich also nicht immer nach einem 50 %-Kriterium, sondern oftmals nach dem Vergleich mit einer subjektiv empfundenen Risikoeinschätzung.

Wo findet man Unterrichtsmaterial?

Printmedien

- in (fast) jeder Zeitschrift und Zeitung
- Bauer, T., Gigerenzer, G., & Krämer, W. (2014). *Warum dick nicht doof macht und Gen-Mais nicht tötet. Über Risiken und Nebenwirkungen der Unstatistik*. Frankfurt am Main: Campus.
- Bruckmaier, G., Binder, K., & Krauss, S. (2015). Numerische Darstellungsarten statistischer Informationen. In E.-M. Plackner & D. Wörner (Hrsg.), *Daten und Zufall. MaMut – Materialien für den Mathematikunterricht*, 3. Hildesheim/Berlin: Franzbecker.
- Herget, W. , & Scholz, D. (1998). *Die etwas andere Aufgabe – aus der Zeitung*. Seelze: Kallmeyer.
- Herget, W., & Strick, H.-K. (2012). *Die etwas andere Aufgabe 2. Mathe mit Pfiff*. Seelze: Friedrich.
- MI – Mathematik lehren (z. B. Ausgaben 138, 179)
- PM – Praxis der Mathematik in der Schule (z. B. Ausgaben 11, 48, 59)
- Quatember, A. (2015). *Statistischer Unsinn. Wenn Medien an der Prozensthürde scheitern*. Berlin/Heidelberg: Springer.



Wo findet man Unterrichtsmaterial?

Online

- in vielen Artikeln im Internet
- Zeitschrift „Stochastik in der Schule“:
<http://stochastik-in-der-schule.de>
- Monatlich eine neue falsche Statistik:
www.unstatistik.de/
- Sammlung unsinniger bzw. irreführender Statistiken in den Medien:
www.jku.at/ifas/content/e101235/
- Zahlreiche Links u.a. zu statistischen Landesämtern und Datenbanken:
www.statistik2013.de/de/links.html
- Homepage zum Standardwerk zur Leitidee L5:
www.leitideedatenundzufall.de





Zusammenfassung

- Statistische Informationen können auf unterschiedliche Weise dargestellt werden. Die möglichen Darstellungsformen werden in Medien und Schule unterschiedlich häufig verwendet.
- Die Umrechnung der sechs verschiedenen Darstellungsarten von statistischen Zahlen ist sehr fehleranfällig.
- Zeitungsausschnitte eignen sich gut als Ausgangspunkt für den Unterricht.
- Man findet umfangreiches Material in Zeitungen, Zeitschriften und Büchern sowie im Internet.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!



Literatur zur Stochastik bzw. Statistik (mit vielen reellen Beispielen z. B. aus Medien):

Dewdney, A. K. (1994). *200 Prozent von nichts*. Basel/Boston/Berlin: Birkhäuser.

Dubben, H.-H., & Beck-Bornholdt, H.-P. (2010). *Der Hund, der Eier legt*. Hamburg: Rowohlt.

Dörner, D. (1989). *Die Logik des Mißlingens*. Hamburg: Rowohlt.

Eichler, A., & Vogel, M. (2009). *Leitidee Daten und Zufall*. Wiesbaden: Vieweg/Teubner.

Fischer, G. (2005). *Stochastik einmal anders*. Wiesbaden: Vieweg.

Gigerenzer, G. (Berlin). *Das Einmaleins der Skepsis*. Berlin: Berlin Verlag.

Gigerenzer, G., Swijtink, Z., Porter, T., Daston, L., Beatty, J., & Krüger, L. (1999). *Das Reich des Zufalls*. Heidelberg: Spektrum.

Hauser, B., & Humpert, W. (2009). *Signifikant? Einführung in statistische Methoden für Lehrkräfte*. Zug: Klett Kallmeyer.

Herget, W. (Hrsg.) (2008). *Wege in die Stochastik* (mathematik lehren, Sammelband). Seelze: Friedrich.

Knöpfel, H., & Löwe, M. (2007). *Stochastik – Struktur im Zufall*. München/Wien: Oldenbourg.

Krämer, W. (1996). *Denkste! Trugschlüsse aus der Welt des Zufalls und der Zahlen*. Frankfurt am Main/New York: Campus.

Krämer, W. (1998). *So lügt man mit Statistik*. Frankfurt am Main/New York: Campus.

Krämer, W. (2010). *Statistik verstehen*. Frankfurt am Main: Campus.