



UNIVERSITÄT REGENSBURG

Naturwissenschaftliche Fakultät II - **Physik**

Anleitung zum Anfängerpraktikum **A1**

Versuch 6 - Nichtlineares Pendel

23. überarbeitete Auflage 2009

Dr. Stephan Giglberger

Prof. Dr. Christian Schüller

Inhaltsverzeichnis

6	Nichtlineares Pendel	3
6.0.1	Versuchsvorbereitung	3
6.0.2	Grundlagen	3
6.0.3	Grundlagen zum Duffing-Oszillator	3
6.1	A Drehpendel	8
6.1.1	Aufgaben zur Vorbereitung	8
6.1.2	Versuchsdurchführung	10
6.1.3	Messaufgaben und Auswertung	11
6.2	B Pendel auf der Luftschiene	13
6.2.1	Aufgaben zur Vorbereitung	13
6.2.2	Versuchsdurchführung	14
6.2.3	Messaufgaben und Auswertung	15
6.3	C Stoß-Oszillator	18
6.3.1	Versuchsdurchführung	18
6.3.2	Messaufgaben und Auswertung	18

6 Nichtlineares Pendel

Der harmonische Oszillator ist zwar für viele Untersuchungen ein gutes Modellsystem, aber er ist in der Praxis immer nur näherungsweise realisiert. Wirkliche Systeme sind mehr oder weniger nichtlinear. Ein nichtlinearer Oszillator zeigt ein komplexes Verhalten bis hin zum Chaos. In diesem Versuch werden als Beispiele die nichtlineare Dynamik eines speziellen Drehpendels und eines Pendels mit zusätzlichen magnetischen Kräften untersucht, die für nicht zu große Auslenkungen näherungsweise einen sog. Duffing-Oszillator darstellen. Die nichtlineare Dynamik ist außer in der Mechanik unter anderem wichtig in der Thermodynamik, z.B. beim Kristallwachstum, bei Strömungen von Flüssigkeiten, z.B. Turbulenz, in der Optik, z.B. Multistabilität von Lasern, in der Elektrodynamik, z.B. bei Oszillatoren mit nichtlinearen Bauelementen, bei speziellen Reaktionen der Chemie und bei Prozessen der Selbstorganisation in der Biologie.

6.0.1 Versuchsvorbereitung

6.0.2 Grundlagen

- Differentialgleichung für das nichtlineare Pendel, lineare und kubische Näherung
- Resonanzkurven des linearen und nichtlinearen Pendels
- Duffing-Oszillator, Doppelmuldenpotential, Phasenraum
- Periodenverdopplung, Bifurkation, Feigenbaum-Diagramm
- Chaos (siehe z. B. Literatur I.2, I.3 und Vorlesung „Physik I“)

6.0.3 Grundlagen zum Duffing-Oszillator

Der Duffing-Oszillator soll hier am Beispiel einer nichtlinearen Drehschwingung behandelt werden. Die entsprechenden Gleichungen für das Pendel auf der Luftschiene sind darunter angegeben. Dabei ist x die Auslenkung des Reiters auf der Luftschiene. K_R ist die rücktreibende Kraft.

Nichtlineares Drehmoment und Potential

Die Differentialgleichung für ein lineares Drehpendel und ihre Lösungen wurde im Versuch Nr. 5 behandelt. Die einfachste Art der Erweiterung auf den nichtlinearen Fall ist es, dem rücktreibenden Drehmoment bzw. der Kraft einen Term hinzuzufügen, der proportional zu dritten Potenz des Auslenkungswinkels θ bzw. der Auslenkung x ist. Man erhält dann

$$\begin{aligned} M_R &= -c'\theta - E'\theta^3, \\ K_R &= -cx - Ex^3. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Man kann in der üblichen Art und Weise durch Integration des Drehmoments bzw. der Kraft die zugehörige potentielle Energie U berechnen und erhält

$$\begin{aligned} U(\theta) &= \frac{1}{2}c'\theta^2 + \frac{1}{4}E'\theta^4, \\ U(x) &= \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{4}Ex^4. \end{aligned} \quad (6.2)$$

wobei die Integrationskonstante gleich Null gesetzt wurde. Die beiden Proportionalitätskonstanten c' und E' bzw. c und E können größer oder kleiner Null sein. Bei einer Feder ist $c > 0$. Wenn $E > 0$ ist, spricht man von einer harten Feder, wenn $E < 0$ ist, von einer weichen Feder.

Interessant ist auch der Fall, dass $c < 0$ und $E > 0$ ist. Dieser Fall kann nicht durch eine einzelne Feder realisiert werden, sondern für das Drehpendel z.B. in der Art, die Abb. 6.8 zeigt, bzw. auf der Luftschiene durch zusätzliche magnetische Kräfte. Der entsprechende Potentialverlauf ist in Abb. 6.1 zu sehen. Man erkennt, dass dieses Potential zwei Minima besitzt. Es wird deswegen auch als Doppelmuldenpotential bezeichnet.

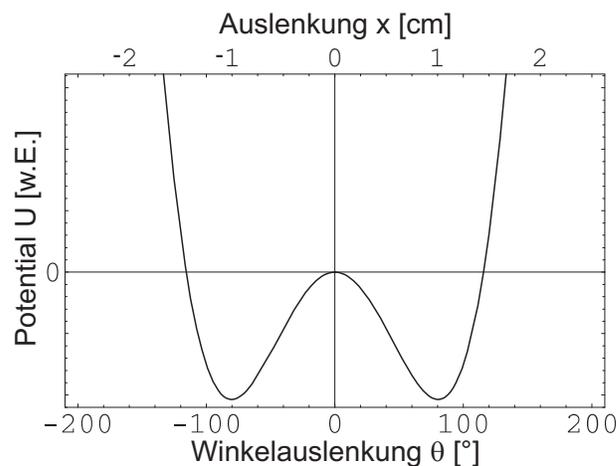


Abbildung 6.1: Doppelmuldenpotential

Freier Duffing-Oszillator

Es soll hier nur der Fall diskutiert werden, dass die Federkonstante $c < 0$ bzw. $c' < 0$ ist und die Nichtlinearität $E > 0$ bzw. $E' > 0$ ist, d.h. dass man ein Doppelmuldenpotential hat. Man bekommt eine qualitative Vorstellung vom Verhalten der Auslenkung eines Duffing-Oszillators, wenn man sich die Bewegung einer Kugel auf einer Linie klar macht, die die Form des Doppelmuldenpotential in Abb. 6.1 hat. Bei kleiner Auslenkung der Kugel aus einem Minimum wird sie nur um das Minimum pendeln und nach einer bestimmten Zeit je nach Dämpfung in diesem Minimum liegen bleiben.

Bei genügend großer Auslenkung wird sie von einem Minimum in das andere und eventuell wieder zurück rollen und dort irgendwann wieder die Gleichgewichtslage erreichen. Abbildung 6.2 zeigt anhand dieses Beispiels für einen gedämpften Duffing-Oszillator den Phasenraum (links oben), die Drehgeschwindigkeit (rechts oben) und den Auslenkungswinkel (links unten) als Funktion der Zeit.

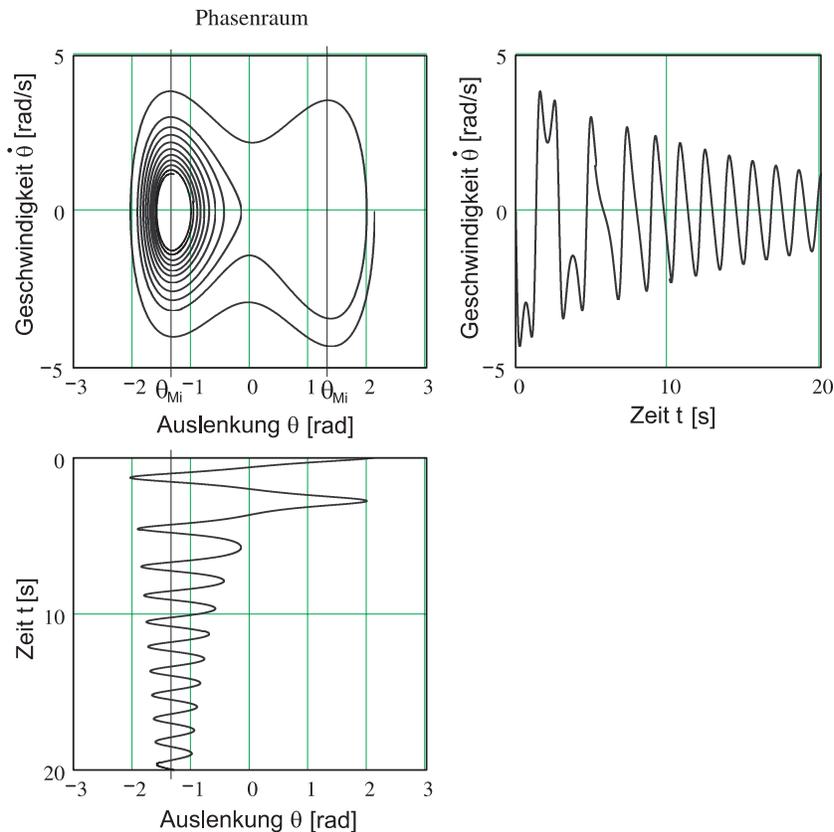


Abbildung 6.2: Phasendiagramm, Auslenkung $\theta(t)$ und Drehgeschwindigkeit $\dot{\theta}(t)$ eines freien Duffing-Oszillators.

Bei genauerer Betrachtung der Abbildung sieht man, dass die Auslenkung zunächst zwischen den beiden Minima hin und her geht und dann in eines der Minima als Gleichgewichtslage einschwingt. Für das Pendel auf der Luftschiene erhält man ähnliche Kurven wie in Abbildung 6.2, wenn man Auslenkung x und Geschwindigkeit \dot{x} aufträgt.

Duffing-Oszillator mit äußerem Drehmoment

Mit dem rücktreibenden Drehmoment bzw. der Kraft aus Gl. (6.1) und dem äußeren Drehmoment $M_a = M_0 \sin \omega t$ bzw. der Kraft $K_a = K_0 \sin \omega t$ erhält man folgende Differentialgleichung

$$\begin{aligned} I\ddot{\theta} + \gamma'\dot{\theta} + c'\theta + E'\theta^3 &= M_0 \sin \omega t, \\ m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + cx + Ex^3 &= K_0 \sin \omega t, \end{aligned} \tag{6.3}$$

wobei γ' bzw. γ die geschwindigkeitsproportionale Dämpfung beschreibt. Dividiert man durch das Trägheitsmoment I bzw. die Masse m , so erhält man folgende Form

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + 2\beta'\dot{\theta} + \omega_0^2\theta + \omega_0^2\varepsilon'\theta^3 &= \alpha'_0 \sin \omega t \\ \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2x + \omega_0^2\varepsilon x^3 &= \alpha_0 \sin \omega t, \end{aligned} \tag{6.4}$$

mit $\beta' = \frac{\gamma'}{2I}$, $\omega_0^2 = \frac{c'}{I}$, $\varepsilon' = \frac{E'}{c'}$ und $\alpha'_0 = \frac{M_0}{I}$,
bzw. $\beta = \frac{\gamma}{2m}$, $\omega_0^2 = \frac{c}{m}$, $\varepsilon = \frac{E}{c}$ und $\alpha_0 = \frac{K_0}{m}$.

Je nach der Größe der Nichtlinearität E' bzw. ε' sehen die Lösungen für diese Differentialgleichung unterschiedlich aus.

Die folgende Diskussion der Wirkung der Nichtlinearität wird für das Drehpendel geführt, gilt aber analog für das Pendel auf der Luftschiene.

Bei kleiner Nichtlinearität ($\varepsilon' \ll 1$) sind besonders die Veränderungen der Resonanzkurven von In-

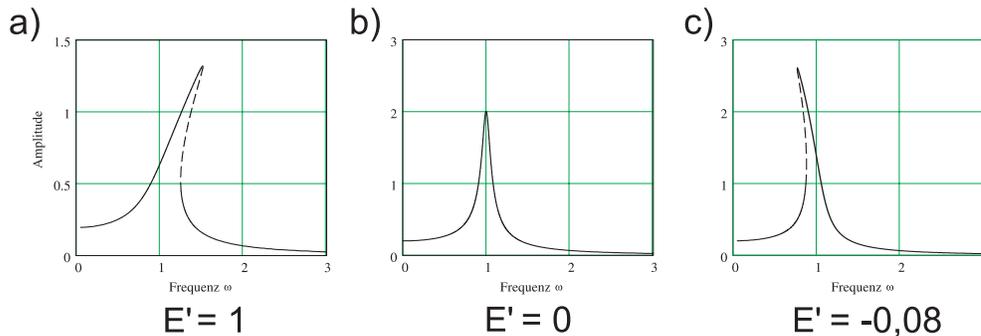


Abbildung 6.3: Resonanzkurven für verschiedene Nichtlinearitäten E' .

teresse. Einige Beispiele sind in Abb. 6.3 zu sehen. Man erkennt, dass je nach Vorzeichen der Nichtlinearität E' bzw. ε' die Resonanzkurven zu kleinen bzw. zu großen Frequenzen „verbogen“ sind. Der gestrichelt gezeichnete Bereich ist instabil und kann experimentell nicht beobachtet werden. Die im Experiment gemessene Kurve ist davon abhängig, ob man mit steigender oder fallender Anregungsfrequenz misst.

Ist die Nichtlinearität E' bzw. ε' groß genug, so kann das Verhalten des Duffing-Oszillators sehr kompliziert sein. Es hängt extrem stark von der Wahl der Parameter c' und E' , der Dämpfung γ' , der

Anregungsfrequenz ω und dem Betrag M_0 des äußeren Drehmoments ab.

Als Beispiel soll diskutiert werden, wie sich das Schwingungsverhalten des Duffing-Oszillators verändert, wenn bei sonst festen Parametern die Frequenz ω des äußeren Drehmoments variiert wird. Abb. 6.4 zeigt für eine bestimmte Anregungsfrequenz ω den Auslenkungswinkel θ und seine Zeitableitung $\dot{\theta}$ als Funktion der Zeit t und das entsprechende Diagramm des Phasenraums an. Bemerkenswert ist, dass bei einer nur wenig geänderten Anregungsfrequenz zwei Schwingungsamplituden beobachtet werden, wodurch sich die Schwingsdauer verdoppelt (Abb. 6.5). Man spricht hier von Periodenverdopplung. Bei einer geeigneten anderen Frequenz kann wieder Periodenverdopplung auftreten.

Trägt man die Auslenkung θ_A gegen die Anregungsfrequenz ω oder die Amplitude M_0 des anre-

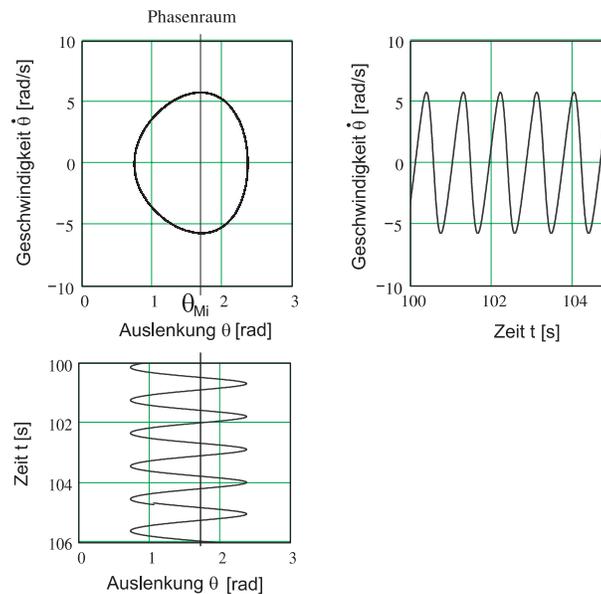


Abbildung 6.4: Phasendiagramm, Auslenkung $\theta(t)$ und Drehgeschwindigkeit $\dot{\theta}(t)$ eines getriebenen Duffing-Oszillators für $\omega = 6,9 s^{-1}$.

genden Drehmoments auf, so erhält man ein sogenanntes Feigenbaum-Diagramm. Abb. 6.6 zeigt ein Beispiel dafür. Die Aufspaltungen der Amplitude bezeichnet man als Bifurkationen. Ab einer bestimmten Anregungsfrequenz erfolgt der Übergang zu einem chaotischen Verhalten. Es handelt sich dabei um ein sog. deterministisches Chaos.

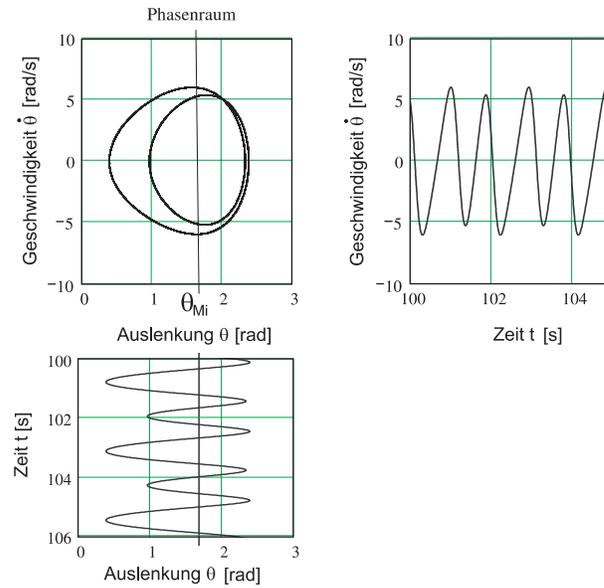


Abbildung 6.5: Phasendiagramm, Auslenkung $\theta(t)$ und Drehgeschwindigkeit $\dot{\theta}(t)$ eines getriebenen Duffing-Oszillators für $\omega = 6,55 \text{ s}^{-1}$.

6.1 A Drehpendel

6.1.1 Aufgaben zur Vorbereitung

Das Doppelmuldenpotential wird durch das Anbringen der Zusatzmasse m vertikal über der Drehachse erreicht (siehe Versuchsdurchführung). Die Masse kann nach links oder rechts fallen und jeweils eine stabile Gleichgewichtslage (Minimum des Potentials) einnehmen.

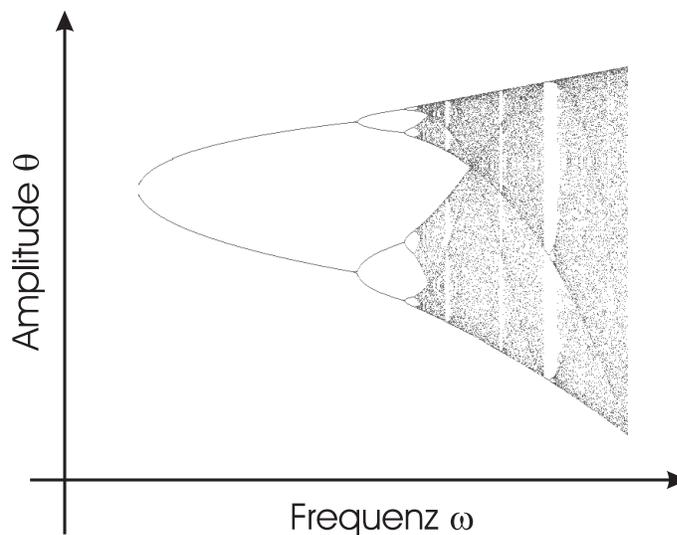


Abbildung 6.6: Feigenbaum-Diagramm.

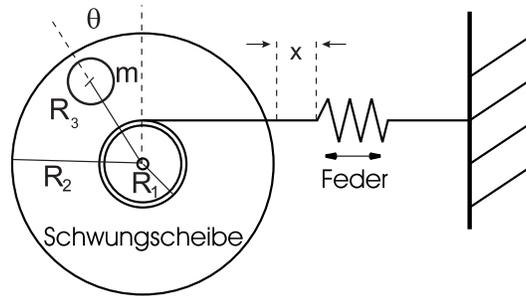


Abbildung 6.7: Vereinfachte Darstellung des Drehpendels.

Hinweis: Rechnen Sie alle Winkel in Radian ($0..2\pi$)!

1. Berechnung des gesamten rücktreibenden Drehmoments $M(\theta)$.
 - a) Berechnen Sie das auf die Scheibe wirkende Drehmoment $M_S(\theta)$, das durch die Schwerkraft auf die Masse m ausgeübt wird (siehe Abb. 6.7).
 - b) Geben Sie das gesamte Drehmoment $M(\theta)$ durch die Schwerkraft (M_S) und Feder (M_F) in Abb. 6.7 an (vgl. Aufgabe 3b im Versuch 5).
 - c) Skizzieren Sie qualitativ die Drehmomente M , M_S , und M_F als Funktion der Auslenkung θ .
2. Potentielle Energie $U(\theta)$
 - a) Berechnen Sie aus den Drehmomenten $M_F(\theta)$ und $M_S(\theta)$ die Beiträge $U_F(\theta)$ und $U_S(\theta)$ der Feder und der Schwerkraft zum Potential und das gesamte Potential $U(\theta)$ als Funktion des Auslenkwinkels θ der Scheibe. Verwenden Sie die Anfangsbedingung $U(0) = 0$.
 - b) Skizzieren Sie die Potentiale U_F , U_S und U als Funktion von θ für die unten angegebenen Zahlenwerte. Das gesamte Potential hat Minima bei $\theta_{Mi} = \pm 1,967$ ($112,7^\circ$) und Nullstellen bei $\theta_{U=0} = \pm 2,899$ ($166,1^\circ$).
 - c) Geben Sie das gesamte Trägheitsmoment I der beiden Scheiben inklusive der Zusatzmasse m an, die als punktförmig betrachtet werden soll.
 - d) Berechnen Sie die zweite Ableitung des Potentials U nach θ in einem der Minima, d.h. für $\theta = \theta_{Mi}$, und daraus die Schwingungsfrequenz ω_{Mi} bei kleinen Auslenkungen in diesem Minimum.
3. Differentialgleichung für nichtlineares Drehpendel
 - a) Geben Sie die Differentialgleichung für das in Abb. 6.7 skizzierte nichtlineare Drehpendel an, das von außen periodisch getrieben wird.

- b) Zeigen Sie, daß diese Differentialgleichung für geeignet kleine Auslenkungswinkel θ in die Differentialgleichung eines Duffing-Oszillators übergeht. Für kleine Auslenkungen θ können Sie den Sinus in eine Taylor-Reihe entwickeln (vgl. z.B. Bronstein, Taschenbuch der Mathematik). Benutzen Sie diese Reihenentwicklung und berechnen Sie die Parameter ω_0^2 und ε' des Duffing-Oszillators (siehe Grundlagen) mit den unten angegebenen Zahlenwerten.

Zahlenwerte: Federkonstante $C = 23 \text{ N/m}$; Radien: $R_1 = 1,5 \text{ cm}$; $R_2 = 4,3 \text{ cm}$; $R_3 = 3,75 \text{ cm}$.
Massen: $M_1 = 70 \text{ g}$; $M_2 = 200 \text{ g}$; $m = 30 \text{ g}$

6.1.2 Versuchsdurchführung

Apparate und Aufbau

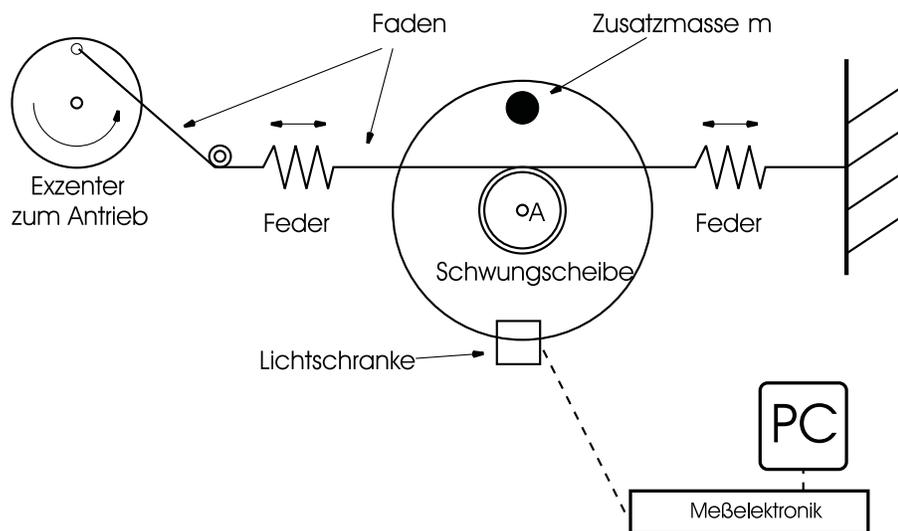


Abbildung 6.8: Schematischer Messaufbau.

Der Versuchsaufbau wird von Versuch 5 übernommen und erweitert um eine Zusatzmasse m , die im (labilen) Gleichgewichtszustand vertikal über der Drehachse A sitzt. Das zugehörige Potential ist ein Doppelmuldenpotential.

Hinweis zur Fehlerbetrachtung:

Die zeitliche Auflösung der Messungen mit dem PC beträgt 40 ms. Über diese Zeit werden die Messpunkte integriert, eine genauere Angabe der Zeit ist nicht möglich.

Die Breite und der Abstand der Striche auf dem Raster der Lichtschranke ist 0,33 mm (entspricht

$0,36^\circ$ beim Drehpendel). Diese Werte bestimmen die räumliche Auflösung. Da für die Amplitudenmessung zwei Punkte der Ellipse im Phasendiagramm benötigt werden, ist ein Fehler von $0,7\text{mm}$ (bzw. $0,7^\circ$ beim Drehpendel) anzunehmen.

Justierung

Justieren Sie die große Scheibe ohne Zusatzmasse relativ zur kleinen so, dass das Loch exakt über der Achse A der Scheiben steht. Bringen Sie die Zusatzmasse $m = 30\text{g}$ an der Schwungscheibe des Pendels an. Achten Sie auch darauf, dass die Schnur mit dem Radius am Antriebsrad des Motors einen rechten Winkel bildet. Halten Sie die Scheibe in dieser Stellung fest und kalibrieren Sie durch Knopfdruck den Nullpunkt der elektronischen Messeinheit. Lassen Sie erst dann die Scheibe los. Die Masse fällt nun in eines der Potentialminima.

Vorversuch

Stellen Sie den Abstand der Magnete möglichst groß ein.

1. Schauen Sie sich zunächst qualitativ an, wie sich das Drehpendel bei kleinen und großen Auslenkungen verhält. Suchen Sie die Gleichgewichtslagen des Pendels. Woran erkennen Sie, dass es sich um ein Doppelmuldenpotential handelt?
2. Lenken Sie das Drehpendel um $\theta_0 = 60^\circ$ aus einer Gleichgewichtslage aus und lassen Sie es frei schwingen. Das Pendel darf dabei die Potentialmulde nicht verlassen. Messen Sie mit der Stoppuhr die Dauer von 7 Schwingungen (viermal durchführen). Berechnen Sie die Schwingungsdauer T_0 und geben Sie den Fehler an.

6.1.3 Messaufgaben und Auswertung

1. Freie Schwingung in einem Potentialminimum
 - a) Messen Sie die Schwingungsdauer T_0 ohne magnetische Dämpfung für kleine Auslenkungen. Vergleichen Sie T_0 mit dem Wert des Vorversuchs. Berechnen Sie aus T_0 die Schwingungsfrequenz ω_{Mi} und vergleichen Sie den Wert mit dem in der Vorbereitungsaufgabe 2d berechneten Wert.
 - b) Stellen Sie den Abstand zwischen Schwungscheibe und Magnet auf $d = 0,1\text{mm}$. Achten Sie auf jeden Fall darauf, daß sich Schwungscheibe und Magnet bei keiner Auslenkung berühren. Wenn Sie das Pendel frei schwingen lassen, sollte die Dämpfung so groß sein, daß Sie höchstens zwei Schwingungen beobachten können.

2. Resonanzkurve

Betrachten Sie bei Ihren Messungen nicht nur den Bildschirm des PC, sondern schauen Sie sich immer wieder das Drehpendel direkt an, um einen unmittelbaren Eindruck vom Schwingungsverhalten zu bekommen.

- a) Messen Sie die Resonanzkurve des Pendels bei steigenden Antriebsfrequenzen von $\nu = 0,35 - 1,5 \text{ Hz}$ bei der gleichen Dämpfung wie in Messaufgabe 1b. Bestimmen Sie dazu die Amplitude θ_A der Winkelauslenkung für verschiedene Antriebsfrequenzen ν . Achten Sie darauf, dass Sie sich in der Nähe des Resonanzmaximums in möglichst kleinen Frequenzschritten vorantasten, und dass Sie zu keiner Zeit die Richtung der Frequenz ändern!
- b) Bestimmen Sie nun gleichermaßen die Resonanzkurve bei fallenden Antriebsfrequenzen von $\nu = 1,5 - 0,35 \text{ Hz}$.
- c) Tragen Sie die in 2a und 2b gemessenen Werte von θ_A gegen ν auf. In welchen Frequenzbereichen stimmen diese Resonanzkurven miteinander überein, in welchen nicht? Diskutieren Sie die Abweichungen.

3. Bifurkation

Entfernen Sie die Zusatzmasse und bringen Sie statt dessen die Masse $m = 20 \text{ g}$ an. Wiederholen Sie zur Neukalibrierung die Vorgehensweise der Vorarbeit. Versuchen Sie nun, durch Variation der Antriebsfrequenz Bifurkationen im Phasendiagramm zu finden. Verändern Sie die Dämpfung nur notfalls. Beobachten Sie auf dem Bildschirm den Phasenraum und das $\theta(t)$ -Diagramm und **schauen Sie sich die Bewegung des Pendels direkt an**. In welchem Frequenzbereich finden Sie Bifurkationen, und wie verhalten sie sich bei geringfügigen Änderungen in der Antriebsfrequenz? Beachten Sie, dass an diesem Gerät Einschwingdauern von bis zu 1 min auftreten können. Finden Sie auch Periodenvervierfachungen oder höher?

4. Chaos

Versuchen Sie ausgehend von den Bifurkationen durch Änderung von Frequenz und gegebenenfalls auch der Dämpfung chaotisches Verhalten zu erzeugen.

5. Falls Sie noch Zeit haben, probieren Sie qualitativ verschiedene Parameter aus, um das vielfältige Verhalten eines Drehpendels kennen zu lernen.

6.2 B Pendel auf der Luftschiene

6.2.1 Aufgaben zur Vorbereitung

Das Doppelmuldenpotential wird durch das Anbringen des Magnets M_3 auf dem Reiter und der Magnete M_4 und M_5 gegenüber dem Reiter mit dem Abstand y_0 erzeugt (siehe Abb. 6.9 und Abb. 6.10). M_3 und M_4 (bzw. M_5) stoßen sich ab. Man hat zwei entgegen gerichtete Kräfte: Die magnetische Kraft, die den Reiter aus der Lage $x = 0$ wegdrückt und die Federkraft, die den Reiter in die Gleichgewichtslage $x = 0$ (ohne Magneten) zieht. Wenn der Reiter die Entfernung $\pm x_M$ hat, sind die Kräfte entgegengesetzt gleich, die Gesamtkraft ist gleich Null. Hier liegen die beiden Minima des Potentials.

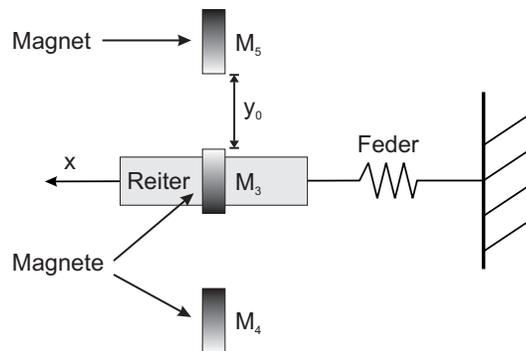


Abbildung 6.9: Vereinfachte Darstellung des Pendels auf der Luftschiene.

1. Kräfte und Potentielle Energie $U(x)$

Die x -Komponente der Kraft der Magnete M_4 und M_5 auf den Magneten M_3 und damit auf den Reiter sei näherungsweise gegeben durch:

$$K_M(x) = A x e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2}. \quad (6.5)$$

Die verwendete Funktion hat keinen physikalischen Hintergrund. Sie wurde empirisch durch den Fit der gemessenen Kraft als Funktion des Abstands x mit den Fitkonstanten A und x_0 bestimmt. Die Kraft $K_F(x)$ der Federn wurde in Versuch 5 berechnet.

- Skizzieren Sie qualitativ die Kräfte K_M und K_F als Funktion von x . Überlegen Sie sich dazu, welche Werte die magnetische Kraft K_M für $x \rightarrow 0$ und $x \rightarrow \infty$ annimmt. Welche Richtung haben die Federkraft K_F und die magnetische Kraft K_M für $x > 0$ und $x < 0$?
- Berechnen Sie aus den Kräften $K_F(x)$ und $K_M(x)$ auf den Reiter die Beiträge $U_F(x)$ und $U_M(x)$ der Feder und der Magnete zum Potential und das gesamte Potential $U(x)$ als Funktion der Auslenkung x des Reiters. Verwenden Sie die Anfangsbedingung $U(0) = 0$.

- c) Skizzieren Sie die Potentiale U_F , U_M und U als Funktion von x . Das gesamte Potential U hat für die unten angegebenen Zahlenwerte Minima bei $x_{Mi} = \pm 15,5$ mm und Nullstellen bei $x_{U=0} = \pm 26,8$ mm.
- d) Berechnen Sie die zweite Ableitung des Potentials U nach x in einem der Minima, d.h. für $x = x_{Mi}$, und daraus die Schwingungsfrequenz ω_{Mi} bei kleinen Auslenkungen in diesem Minimum. Geben Sie eine Fehlerabschätzung an.

2. Differentialgleichung für nichtlineares Pendel

- a) Geben Sie die Differentialgleichung für das in Abb. 6.9 skizzierte nichtlineare Pendel an, das durch einen geeigneten Mechanismus von außen getrieben wird.
- b) Zeigen Sie, daß diese Differentialgleichung für geeignet kleine Auslenkung x in die Differentialgleichung eines Duffing-Oszillators übergeht. Für kleine Auslenkungen x können Sie die Kraft in eine Taylor-Reihe bis zur dritten Potenz in x entwickeln (vgl. z.B. Bronstein, Taschenbuch der Mathematik). Benutzen Sie diese Reihenentwicklung und berechnen Sie die Parameter ω_0^2 und ε des Duffing-Oszillators (siehe Grundlagen) mit den unten angegebenen Zahlenwerten.

Zahlenwerte:

Federkonstanten $c_1 = c_2 = (12,6 \pm 0,2)$ N/m; $y_0 = (12,0 \pm 0,2)$ mm; $A = (117 \pm 2)$ N/m; $x_0 = (12,5 \pm 0,2)$ mm;

führen Sie die Rechnungen für die Masse $m = 352$ g und $m = 411$ g (je 3% Fehler) durch.

6.2.2 Versuchsdurchführung

Apparate und Aufbau

Der Versuchsaufbau wird von Versuch 5.B übernommen. Die Magneten M_1 und M_2 bewirken die Dämpfung. Die Magneten M_3 , M_4 und M_5 erzeugen wie oben beschrieben das Doppelmuldenpotential (siehe Abb. 6.10).

Hinweis zur Fehlerbetrachtung:

Die zeitliche Auflösung der Messungen mit dem PC beträgt 40 ms. Über diese Zeit werden die Messpunkte integriert, eine genauere Angabe der Zeit ist nicht möglich.

Die Breite und der Abstand der Striche auf dem Raster der Lichtschranke ist 0,33 mm. Dieser Wert bestimmt die räumliche Auflösung. Da für die Amplitudenmessung zwei Punkte der Ellipse im Phasendiagramm benötigt werden, ist ein Fehler von 0,7 mm anzunehmen.

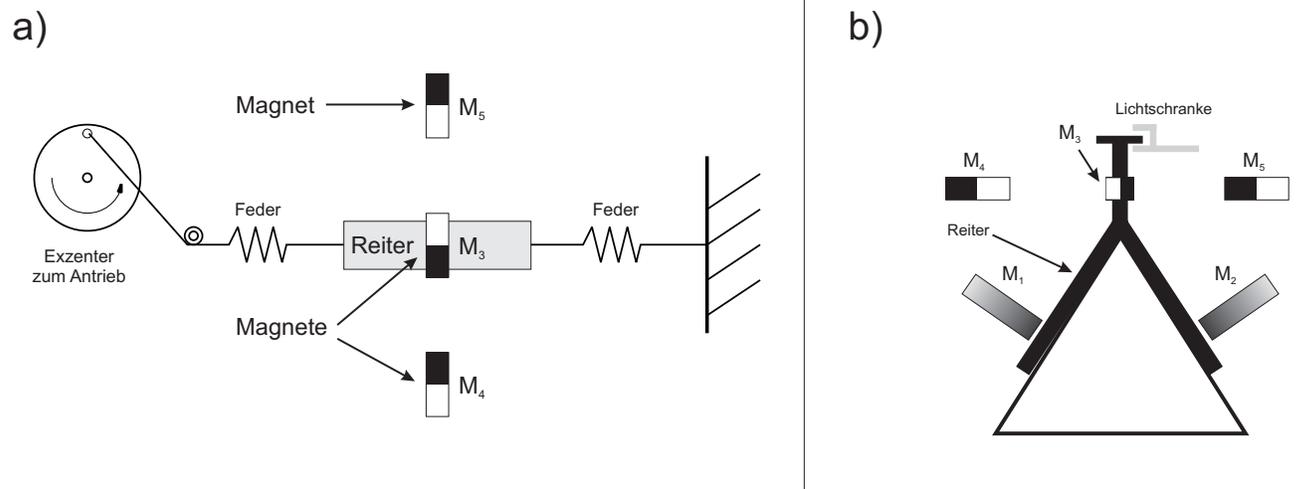


Abbildung 6.10: Schematischer Messaufbau. a) Sicht von oben, b) Sicht von vorne.

Die Justierung der Magnete M_3 , M_4 und M_5 ist sehr wichtig und wird Ihnen von Ihrem Betreuer gezeigt!

Vorversuch

Entfernen Sie die Magnete M_1 und M_2 , sodass die magnetische Dämpfung gleich Null ist. Den Abstand der Magnete M_4 und M_5 vom Magnet M_3 wählen Sie gleich $y_0 = 12\text{ mm}$.

1. Schauen Sie sich zunächst qualitativ an, wie sich der Reiter bei kleinen und großen Auslenkungen verhält. Suchen Sie die Gleichgewichtslagen des Reiters. Woran erkennen Sie, daß es sich um ein Doppelmuldenpotential handelt?
2. Lenken Sie den Reiter um $x_0 = 1\text{ cm}$ aus einer Gleichgewichtslage aus und lassen Sie ihn freischwingen. Messen Sie mit der Stoppuhr die Dauer von 10 Schwingungen (viermal durchführen). Berechnen Sie die Schwingungsdauer T_0 und geben Sie den Fehler an.

6.2.3 Messaufgaben und Auswertung

1. Freie Schwingung in einem Potentialminimum

Messen Sie die Schwingungsdauer T_0 mit dem Computer ohne magnetische Dämpfung für kleine Auslenkungen. Vergleichen Sie T_0 mit dem Wert des Vorversuchs. Berechnen Sie aus T_0 die Schwingungsfrequenz ω_{M_i} und vergleichen Sie den Wert mit dem in der Vorbereitungsaufgabe 1c berechneten Wert.

2. Resonanzkurve

Betrachten Sie bei Ihren Messungen nicht nur den Bildschirm des PC, sondern schauen Sie sich immer wieder das Pendel direkt an, um einen unmittelbaren Eindruck vom Schwingungsverhalten zu bekommen.

Stellen Sie den Abstand zwischen den Dämpfungsmagneten M_1 und M_2 und dem Reiter auf $d = 0,2\text{ mm}$ ein. Den Abstand der Magneten M_4 und M_5 von M_3 wählen Sie gleich $y_0 = 7\text{ mm}$. Achten Sie auf jeden Fall darauf, daß sich Reiter und Magneten bei keiner Auslenkung berühren.

a) Vorversuch

- i. Schalten Sie den Motor bei einer Antriebsfrequenz von $\nu = 1,0\text{ Hz}$ ein und erhöhen Sie die Antriebsfrequenz auf $\nu = 3,0\text{ Hz}$.
- ii. Erniedrigen Sie nun die Frequenz langsam bis auf $\nu = 1,5\text{ Hz}$ und beobachten Sie dabei das Pendel. Sollte der Reiter während des Vorgangs die Potentialmulde verlassen und in die andere wechseln, stellen Sie den Abstand der Magneten M_4 und M_5 von M_3 auf $y_0 = 6\text{ mm}$ ein. Erhöhen Sie wieder die Antriebsfrequenz auf $\nu = 3,0\text{ Hz}$ und wiederholen Sie Punkt ii). Wenn der Reiter wiederum die Potentialmulde verläßt, ändern Sie den Abstand der Magneten M_4 und M_5 von M_3 auf $y_0 = 5\text{ mm}$.

b) Messen Sie die Resonanzkurve des Pendels bei steigenden Antriebsfrequenzen von $\nu = 1,0 - 3,0\text{ Hz}$. Bestimmen Sie dazu die Amplitude x_A der Winkelauslenkung für verschiedene Antriebsfrequenzen ν . Achten Sie darauf, dass Sie sich in der Nähe des Resonanzmaximums in möglichst kleinen Frequenzschritten vorantasten, und dass Sie zu keiner Zeit die Richtung der Frequenz ändern!

c) Bestimmen Sie nun gleichermaßen die Resonanzkurve bei fallenden Antriebsfrequenzen von $\nu = 3,0 - 1,0\text{ Hz}$.

d) Tragen Sie die in 2a und 2b gemessenen Werte von x_A gegen ν auf. In welchen Frequenzbereichen stimmen diese Resonanzkurven miteinander überein, in welchen nicht? Diskutieren Sie die Abweichungen.

3. Bifurkation und Chaos

Stellen Sie den Abstand $y_0 = 12\text{ mm}$ zwischen den Magneten M_3 und M_4 (bzw. M_5) und den Abstand $d = 0,5\text{ mm}$ zwischen den Dämpfungsmagneten M_1 und M_2 und dem Reiter ein. Versuchen Sie nun, durch Variation der Antriebsfrequenz von $0,7\text{ Hz}$ bis $2,5\text{ Hz}$ Bifurkationen und Chaos im Phasendiagramm zu finden. Beobachten Sie auf dem Bildschirm den Phasenraum und das $x(t)$ -Diagramm und **schauen Sie sich die Bewegung des Pendels direkt an**. In welchem Frequenzbereich finden Sie Bifurkationen, und wie verhalten sie sich bei geringfügigen

Änderungen in der Antriebsfrequenz? Beachten Sie, dass an diesem Gerät Einschwingdauern von bis zu 1 min auftreten können.

4. Falls Sie noch Zeit haben, probieren Sie qualitativ verschiedene Parameter aus, um das vielfältige Verhalten eines Pendels kennen zu lernen.

6.3 C Stoß-Oszillator

Der Stoß-Oszillator, der in dem Lehrbuch von Tipler [Lit. 3] auch Bender-Oszillator genannt wird, stellt eine einfache Möglichkeit dar, einen nichtlinearen Oszillator zu realisieren. In unserem Fall besteht er aus dem Reiter auf der Luftschiene mit zwei Federn (siehe Versuch 5.B), wobei zusätzlich eine harte gebogene Bandfeder im normalen Schwingungsbereich angebracht ist (siehe Abbildung 6.11). Bei jeder Schwingung stößt der Reiter auf die harte Feder und wird elastisch reflektiert. Damit ist die auf den Reiter wirkende Kraft keine lineare Funktion der Auslenkung mehr. Es handelt sich also um ein nichtlineares System. Man kann wie bei den beiden anderen nichtlinearen Versuchen erwarten, dass in bestimmten Bereichen der Versuchsparameter Bifurkationen und Chaos auftreten.

6.3.1 Versuchsdurchführung

Apparate und Aufbau

Der Versuchsaufbau wurde von Versuch 5 übernommen und um die zusätzliche harte gebogene Bandfeder erweitert. Der Abstand x_B der Bandfeder zur Gleichgewichtslage des Reiters ist ein wichtiger Parameter, der das nichtlineare Verhalten entscheidend beeinflusst.

6.3.2 Messaufgaben und Auswertung

Justierung: Bestimmen Sie die Gleichgewichtslage des Reiters. Stellen Sie den Abstand $x_B = -0,5$ cm zur Bandfeder ein (siehe Abb. 6.11). Verwenden Sie einen Abstand von $d = 0,2$ mm und $d = 1,0$ mm zwischen den Dämpfungsmagneten M_1 und M_2 und dem Reiter.

Betrachten Sie bei Ihren Messungen nicht nur den Bildschirm des PC, sondern schauen Sie sich immer wieder den Stoß-Oszillator direkt an, um einen unmittelbaren Eindruck vom Schwingungsverhalten zu bekommen.

Versuchen Sie nun, durch Variation der Antriebsfrequenz von $\nu = 1,5 - 2,0$ Hz Bifurkationen und Chaos im Phasendiagramm zu finden. Beobachten Sie auf dem Bildschirm das Phasendiagramm und das $x(t)$ -Diagramm und schauen Sie sich die Bewegung des Reiters direkt an. Notieren Sie die Werte von x_B , d_0 und ν , bei denen Sie Bifurkation oder Chaos finden.

Probieren Sie auch andere Werte des Abstands x_B und der Dämpfung.

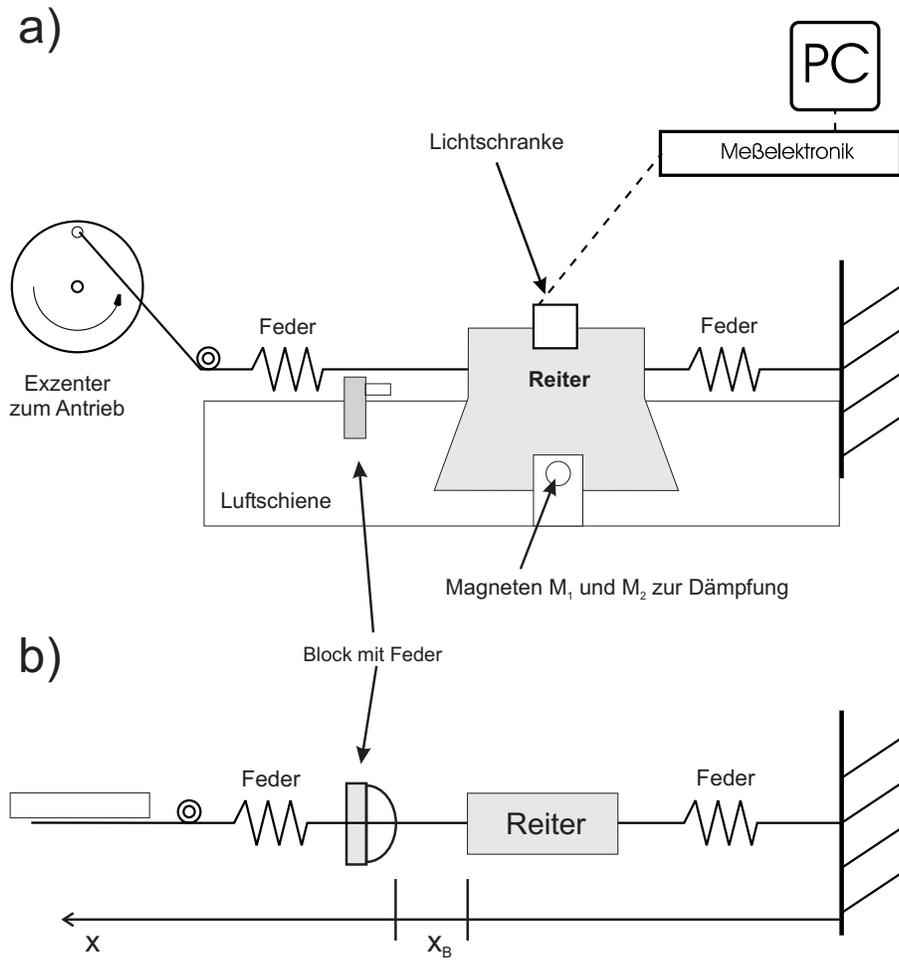


Abbildung 6.11: Schematischer Messaufbau. a) Seitenansicht, b) Sicht von oben.